NOMBRE Y nº de MATRÍCULA:

Tiempo: 2 horas

Primero	*Segundo*	*Tercero*	*Cuarto*	*TOTAL*

SEGUNDO PARCIAL (3/6/2015)

1. . *(2.5 ptos.)* Calcular la integral doble:
   $$\iint_{R} y\sin(x^2)\, dxdy \ ,$$
   siendo R el recinto acotado del primer cuadrante limitado por las curvas de ecuaciones respectivas $y^2 = x, y = 0, x = \sqrt{\pi}$

2. *(2.5 ptos.)* Mediante el procedimiento de Lagrange calcular los extremos de la función: $f(x,y) = x^2 - 4y$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 9$

3. *(2.5 ptos.)* **Dada la función** $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x$, determinar los puntos (a,b)en los que la derivada direccional $f'_{\vec{v}}(a,b)$, con $\vec{v} = (1,1)$, vale cero.

4. *(2 .5ptos.)* Calcular los puntos de la superficie $g(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$en los cuales el plano tangente es horizontal.

NOMBRE Y nº de MATRÍCULA:

Tiempo: 2 horas

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	TOTAL

SEGUNDO PARCIAL (3/6/2015)

1. *(2.5 ptos.)* Calcular la integral doble:

$$\iint_R y\sin(x^2)\,dxdy\ ,$$

siendo R el recinto acotado del primer cuadrante limitado por las curvas de ecuaciones respectivas $y^2 = x, y = 0, x = \sqrt{\pi}$

SOLUCIÓN: El recinto de integración está delimitado superiormente por la parábola $y^2 = x$, inferiormente por el eje de abscisas, $y = 0$ y lateralmente por la recta vertical $x = \sqrt{\pi}$.

Lo proyectamos sobre el eje de abscisas, quedando , entonces descrito como

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \sqrt{\pi}, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$$

Por lo que

I=$\iint_R y\sin(x^2)\,dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} y\sin(x^2)\,dx\,dy$

Y como

$$\int_0^{\sqrt{x}} y\sin(x^2)\,dy = \sin(x^2)\int_0^{\sqrt{x}} ydy = \frac{x\sin(x^2)}{2}$$

Tenemos que

I=$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{x\sin(x^2)}{2}dx = -\frac{1}{4}\cos(x^2)|_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$

2. *(2.5 ptos.)* Mediante el procedimiento de Lagrange calcular los extremos de la función: $f(x,y) = x^2 - 4y$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 9$

<u>SOLUCIÓN</u> Para hallarlos planteamos el sistema de ecuaciones que nos proporciona el lagrangiano

$$\nabla f = \mu\nabla g \Rightarrow \begin{Bmatrix} f'_x = 2x = 2\mu x \\ f'_y = -4 = 2\mu y \end{Bmatrix}$$

Al que añadimos la restricción $x^2 + y^2 = 9$

Tenemos , entonces que resolver el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas

$$\begin{Bmatrix} 2x = 2\mu x \\ -4 = 2\mu y \\ x^2 + y^2 = 9 \end{Bmatrix}$$

Al trabajar con la primera de las ecuaciones advertimos que tenemos que distinguir dos casos posibles:

Caso 1 : x=0

$$x = 0 \Rightarrow \quad y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$$

NOMBRE Y nº de MATRÍCULA:

Tiempo: 2 horas

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	TOTAL

Y obtenemos los puntos $(0,3)\mathrm{y}(0,-3)$
Caso 2 : x no es cero
Ahora se deduce que $\mu = 1, \mathrm{y} = -2, \mathrm{x} = \pm\sqrt{5}$ lo cual nos da los puntos $(\sqrt{5},-2)\mathrm{y}(-\sqrt{5},-2)$
Evaluamos la función en los cuatro puntos obtenidos, y como

$$f(\pm\sqrt{5},-2) = 13, f(0,3) = -12, f(0,-3) = 12$$

Tenemos un mínimo en $(0,3)$ y dos máximos en los puntos $(\pm\sqrt{5},-2)$

3. *(2.5 ptos.)* **Dada la función** $f(x,y) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{xy} - \mathrm{x}$, determinar los puntos (a,b)en los que la derivada direccional $f'_{\vec{v}}(a,b)$, con $\vec{v} = (1,1)$, vale cero.

SOLUCIÓN Como la función dada es un polinomio de segundo grado, será una función diferenciable en todos los puntos del plano, y, en consecuencia, sus derivadas direccionales se pueden calcular con la fórmula del gradiente.
Calculamos el gradiente de la misma $\nabla \mathrm{f} = (2\mathrm{x} + \mathrm{y} - 1, 2\mathrm{y} + \mathrm{x})$ y normalizamos el ector de dirección dado $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Entonces ,

$$f'_{\vec{v}}(a,b) = \frac{3a + 3b - 1}{\sqrt{2}} = 0$$

De donde se deduce que los puntos pedidos son los de la recta $3a + 3b = 1$

4. *(2 .5ptos.)* Calcular los puntos de la superficie $g(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$en los cuales el plano tangente es horizontal.

SOLUCIÓN $(1,1,1) y\ (0,0,0)$

NOMBRE Y nº de MATRÍCULA:

Tiempo: 2 horas

Primero	*Segundo*	*Tercero*	*Cuarto*	*TOTAL*

SEGUNDO PARCIAL (3/6/2015)

1. *(2.5 ptos.)* Calcular la integral doble:
$$\iint_R y\cos(x^2)\,dxdy\ ,$$
siendo R el recinto acotado del primer cuadrante limitado por las curvas de ecuaciones respectivas $y^2 = x, y = 0, x = \sqrt{\pi}$

2. *(2.5 ptos.)* Mediante el procedimiento de Lagrange calcular los extremos de la función: $f(x,y) = y^2 - 4x$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 9$

3. *(2.5 ptos.)* **Dada la función** $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x$, determinar los puntos (a,b)en los que la derivada direccional $f'_{\vec{v}}(a,b)$, con $\vec{v} = (1,1)$, vale cero.

4. *(2 .5ptos.)* Calcular los puntos de la superficie $g(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$en los cuales el plano tangente es horizontal.

NO SE PERMITE EL USO DE ARTILUGIOS (ORDENADORES, CALCULADORAS, ETC….)

NOMBRE Y nº de MATRÍCULA:

Tiempo: 2 horas

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	TOTAL

SEGUNDO PARCIAL (3/6/2015)

1. *(2.5 ptos.)* Calcular la integral doble:

$$\iint_R y\cos(x^2)\,dxdy\ ,$$

siendo R el recinto acotado del primer cuadrante limitado por las curvas de ecuaciones respectivas $y^2 = x, y = 0, x = \sqrt{\pi}$

SOLUCIÓN: El recinto de integración está delimitado superiormente por la parábola $y^2 = x$, inferiormente por el eje de abscisas, $y = 0$ y lateralmente por la recta vertical $x = \sqrt{\pi}$.

Lo proyectamos sobre el eje de abscisas, quedando , entonces descrito como

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \sqrt{\pi}, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$$

Por lo que

I=$\iint_R y\cos(x^2)\,dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dx\,dy$

Y como

$$\int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dy = \cos(x^2)\int_0^{\sqrt{x}} y dy = \frac{x\cos(x^2)}{2}$$

Tenemos que

I=$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{x\cos(x^2)}{2}dx = \frac{1}{4}\sin(x^2)\Big|_0^{\sqrt{\pi}} = 0$

2. *(2.5 ptos.)* Mediante el procedimiento de Lagrange calcular los extremos de la función: $f(x,y) = y^2 - 4x$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 9$

SOLUCIÓN Para hallarlos planteamos el sistema de ecuaciones que nos proporciona el lagrangiano

$$\nabla f = \mu\nabla g \Rightarrow \begin{Bmatrix} f'_x = -4 = 2\mu x \\ f'_y = 2y = 2\mu y \end{Bmatrix}$$

Al que añadimos la restricción $x^2 + y^2 = 9$

Tenemos , entonces que resolver el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas

$$\begin{Bmatrix} 2y = 2\mu y \\ -4 = 2\mu x \\ x^2 + y^2 = 9 \end{Bmatrix}$$

Al trabajar con la primera de las ecuaciones advertimos que tenemos que distinguir dos casos posibles:

Caso 1 : y=0

NOMBRE Y nº de MATRÍCULA:

Tiempo: 2 horas

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	TOTAL

$$y = 0 \Rightarrow \quad x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Y obtenemos los puntos $(3,0)$y$(-3,0)$

Caso 2 : y no es cero

Ahora se deduce que $\mu = 1, x = -2, y = \pm\sqrt{5}$ lo cual nos da los puntos $(-2,\sqrt{5})$y$(-2,-\sqrt{5})$

Evaluamos la función en los cuatro puntos obtenidos, y como

$$f(-2,\pm\sqrt{5}) = 13, f(3,0) = -12, f(-3,0) = 12$$

Tenemos un mínimo en $(3,0)$ y dos máximos en los puntos $(-2,\pm\sqrt{5})$

3. *(2.5 ptos.)* **Dada la función** $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x$, determinar los puntos (a,b)en los que la derivada direccional $f'_{\vec{v}}(a,b)$, con $\vec{v} = (1,1)$, vale cero.

<u>**SOLUCIÓN**</u> Como la función dada es un polinomio de segundo grado, será una función diferenciable en todos los puntos del plano, y, en consecuencia, sus derivadas direccionales se pueden calcular con la fórmula del gradiente.
Calculamos el gradiente de la misma $\nabla f = (2x + y - 1, 2y + x)$ y normalizamos el ector de dirección dado $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Entonces ,

$$f'_{\vec{v}}(a,b) = \frac{3a + 3b - 1}{\sqrt{2}} = 0$$

De donde se deduce que los puntos pedidos son los de la recta $3a + 3b = 1$

4. *(2 .5ptos.)* Calcular los puntos de la superficie $g(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$en los cuales el plano tangente es horizontal.

<u>**SOLUCIÓN**</u> $(1,1,1) y\ (0,0,0)$